

**РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВИГІН ЗАТИСНЕНОЇ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНИ З  
ТОНКИМ ЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ МЕТОДОМ МІНІМІЗАЦІЇ ПОХИБКИ  
ПО ЕНЕРГІЇ**

В.В. Грібова, Л.В. Бовнегра, А.В. Торопенко

Національний університет «Одеська політехніка»

1, Шевченка пр., м. Одеса, 65044, Україна

Emails: gribova@op.edu.ua, dlv5@ukr.net, toropenko.a.v@op.edu.ua

Складчасті оболонки, тонкостінні стержні та інші конструкції, що отримуються на базі з'єднань тонких пластин, мають широке використання в машинобудуванні, в авіаційній та кораблебудівній промисловостях. Наявність в конструкціях підкріплюючих стержнів, опор, прямолінійних дефектів типу тріщин і включень або інших неоднорідностей значно ускладнює їхній розрахунок. Проектування і створення надійних в експлуатації і достатньо економічних конструкцій приводить до необхідності розглядати все більш складні краєві задачі і, відповідно розв'язувати все більше число диференціальних рівнянь, що їх описують. Фундаментом науки про міцність є механіка руйнувань, яка базується на вияві характеру особливостей напружень в околі кінців дефектів типу тріщин і тонких включень. Основою методики розв'язання задачі є побудова моделі, що базується на методі мінімізації похибки за енергією. Основними результатами є побудова системи рішень бігармонійного рівняння в області з прямолінійним включенням, застосування методу граничної колокації для знаходження коефіцієнтів лінійної комбінації.

Метою роботи є розв'язання складних краєвих задач механіки руйнування для тонкостінних конструкцій із включеннями, шляхом побудови математичної моделі на основі методу мінімізації енергетичної похибки та застосування граничної колокації.

**Ключові слова.** Система бігармонійних функцій, метод граничної колокації, клас функцій з особливостями, що не інтегруються, вигини пластини, метод мінімізації похибки за енергією.

**Вступ.** Розглядається задача про вигин пластини з тонким лінійним включенням. Відомо, що наявність в конструкціях підкріплюючих стержнів, опор, прямолінійних дефектів типу тріщини і включень значно ускладнює їх розрахунок, так як перераховані елементи в конструкціях є концентраторами напружень. Дослідження в цьому напрямку були розпочаті В.М. Толкачовим, розвинуті О.В. Онищуком, Г.Я. Поповим і продовжені в роботах С.Т. Грибняка, Ю.С. Процера, В.В. Реута і інших авторів. Рішення задачі розшукується у вигляді лінійної комбінації повної системи бігармонійних функцій, що враховують наявність включення. Для знаходження невідомих коефіцієнтів, вперше, описано метод мінімізації похибки по енергії. Для контролю результатів невідомі коефіцієнти знаходилися також методом граничної колокації. Метою роботи є розв'язання складних краєвих задач механіки руйнування для тонкостінних конструкцій із включеннями, шляхом побудови математичної моделі на основі методу мінімізації енергетичної похибки та застосування граничної колокації.

**Основна частина.** Розглянемо прямокутну пластину ( $|x| < a$ ,  $|y| < b$ ), всередині якої на відріжку  $y=0$ ,  $|y| \leq c$  присутнє тонке жорстке включення. Враховуючи, що поза включенням на пластину не діє розподілене навантаження, приходимо до однорідного бігармонійного рівняння відносно прогинів пластини:

$$\Delta^2 \omega(x, y) = 0, \quad |x| < a, \quad |y| < b \quad \text{окрім } y=0, |x| < c, \quad (1)$$

де  $\omega(x, y)$  – прогини пластини.

Включення переміщується вертикально під дією прикладеного до нього навантаження  $R$ . В математичній постановці включення можна розглядати як розріз з межами  $y = \pm 0, |x| \leq c$ . На межі розрізу виконуються умови:

$$\omega(x, \pm 0) = W_0 \quad |x| \leq c, \quad (2)$$

$$\omega'_y(x, \pm 0) = 0 \quad |x| \leq c, \quad (3)$$

На сторонах пластини задані умови затиснення:

$$\omega(\pm a, y) = \omega'_x(\pm a, y) = 0, \quad |y| \leq b, \quad (4)$$

$$\omega(x, \pm b) = \omega'_y(x, \pm b) = 0, \quad |x| \leq a. \quad (5)$$

Потрібно знайти розподіл прогинів, згинальних моментів, узагальнених перериваючих сил.

З урахуванням парності задачі по  $x$  і  $y$  наближене представлення прогину  $\omega_N(x, y)$  можна записати у вигляді [1]

$$\omega(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n u_n(x, y); \quad (6)$$

$$\text{де } u_0(x, y) = \operatorname{Re} \left( \ln \left( z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) - z (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right);$$

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re} \left( (z\bar{z} - 1) \ln \left( z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right) \right);$$

$$u_{4n-2}(x, y) = \operatorname{Re} \left( z^{2n-1} (z^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right), \quad n = \overline{1, N};$$

$$u_{4n-1}(x, y) = \operatorname{Re} \left( 2iyz^{2n-2} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right), \quad n = \overline{1, N};$$

$$u_{4n}(x, y) = \operatorname{Re} z^{2n-2}, \quad n = \overline{1, N};$$

$$u_{4n+1}(x, y) = \operatorname{Re} \bar{z} z^{2n-1}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Невідомі коефіцієнти  $a_n (n = \overline{0, N})$  шукаються, вперше, методом мінімізації похибки за енергією. Даний метод є близьким в ідейному відношенні до методу, запропонованому Бірманом, Поповим Г.Я., Онищуком О.В. Ідею методу викладемо на прикладі наступної крайової задачі для рівняння вигину пластин:

$$\Delta^2 \omega(x, y) = q(x, y), \quad ((x, y) \in \Omega) \quad (7)$$

У випадку затискання пластини по краям

$$\omega|_{\Gamma} = f_0(S), \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = f_1(S) \quad ((x, y) \in \Gamma = d\Omega) \quad (8)$$

Нехай  $\omega(x, y)$  – точне,  $\omega_N(x, y)$  – наближене рішення задачі (7), (8). Відповідно [1],  $\omega_N(x, y)$  можна представити у вигляді

$$\omega_N(x, y) = \sum_{i=1}^N c_i u_i(x, y) + \omega_q(x, y), \quad (9)$$

де  $u_i(x, y), i = \overline{1, N}$  – повна система рішень рівняння (7) в області  $\Omega$

$\omega_q(x, y)$  – часткове рішення рівняння (7).

Як відомо [6], потенційна енергія вигину тонкої пластини пропорційна величині

$$W(u) = \int_{\Omega} \left( (\Delta u)^2 - 2(1-\nu) \left( u''_{xx} u''_{yy} - (u''_{xy})^2 \right) \right) d\Omega, \quad (10)$$

де  $u$  – вигин пластини,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо білінійну форму  $E(u, \nu)$ , пов'язану з потенційною енергією вигину пластини:

$$E(u, \nu) = \int_{\Omega} \left[ \Delta u \Delta v + (1 - \nu) \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] d\Omega \quad (11)$$

Очевидно

$$E_{\Omega}(u, u) = W(u) \quad (12)$$

В основі методу лежить тотожність [5]:

$$E_{\Omega}(u, \nu) = E_{\Gamma}(u, \nu), \quad E_{\Gamma}(u, \nu) = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} M \nu - u V \nu \right) dS + \int_{\Omega} u \Delta^2 v d\Omega, \quad (13)$$

що дозволяє вирахувати  $E_{\Omega}(u, \nu)$  для невідомого всередині  $\Omega$  точного рішення  $u(x, y)$  і відомої бігармонічної функції  $\nu(x, y)$  ( $\Delta^2 \nu = 0$ ).

Покажемо, що у випадку граничних умов (8), невідомі коефіцієнти  $a_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) можуть бути знайдені з умов мінімуму функціоналу енергії погрішності

$$F(a_1, \dots, a_N) = E(\omega - \omega_N, \omega - \omega_N), \quad (14)$$

де  $\omega$  – невідоме точне,  $\omega_N$  – наближене рішення задачі (7), (8).

Дійсно, мінімізуючи  $F$  і записуючи умову існування екстремуму

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \quad (15)$$

приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $a_n$

$$\sum_{n=1}^N a_n E(u_n, u_m) = b_m \quad (m = \overline{1, N}) \quad (16)$$

$$b_m = E(\omega - \omega_q, u_m)$$

Праві частини  $b_m$  в (16) залежать від невідомої функції  $\omega$ , однак з допомогою відомої тотожності (13), отримуємо вираз для  $b_m$  з допомогою відомих значень  $\omega$  і  $\frac{\partial \omega}{\partial n}$  на межі області  $\Omega$ :

$$b_m = \oint_{\Gamma} \left[ \left( f_1(s) - \frac{\partial \omega_q}{\partial n} \right) M u_m - (f_0(s) - \omega_q) V u_m \right] dS \quad (17)$$

Відмітимо, що формула (17) справедлива, якщо межа  $\Gamma$  області  $\Omega$  є гладкою. У випадку, якщо межа  $\Gamma$  є кусково-гладкою, то вираз (17) варто уточнити.

Нехай межа  $\Gamma$  складається з  $n$  гладких кусків і точок злому межі  $(x_i, y_i)$  ( $i = \overline{1, n}$ ). У виразі (17), варто врахувати скачки відповідних величин в даних точках, після чого (17) прийме вигляд:

$$b_j = \sum_{i=1}^N \left( \oint_{\Gamma} \left[ \left( f_1(s) - \frac{\partial \omega_q}{\partial n} \right) M u_j - (f_0(s) - \omega_q) V u_j \right] dS \right) + \left( f_1(x, y) - \frac{\partial \omega_q(x, y)}{\partial n} \right) \langle M u_j \rangle - \left( (f_0(x, y) - \omega_q(x, y)) \langle V u_j \rangle \Big|_{x=x_i, y=y_i} \right), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (18)$$

де  $\langle u \rangle = u(x(s_i - 0), y(s_i - 0)) - u(x(s_i + 0), y(s_i + 0))$ ,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial u}{\partial n} \rangle &= \frac{\partial u}{\partial n}(x(s_i - 0), y(s_i - 0)) - \frac{\partial u}{\partial n}(x(s_i + 0), y(s_i + 0)), \\ \langle Mu \rangle &= Mu(x(s_i - 0), y(s_i - 0)) - Mu(x(s_i + 0), y(s_i + 0)), \\ \langle Vu \rangle &= Vu(x(s_i - 0), y(s_i - 0)) - Vu(x(s_i + 0), y(s_i + 0)), \quad (i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}) \\ Mu &= -D \left( \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) u, \quad Vu = -D \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right) u \end{aligned}$$

$D$  – циліндрична жорсткість,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $s$  – дотична до межі  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Реалізація методу мінімізації похибки по енергії, застосована до задачі (1) – (5), з урахуванням подання прогинів пластини у вигляді (6) і формул (16), (18), призводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, відносно невідомих коефіцієнтів  $a_i, (i = \overline{0, N})$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N a_i E(u_i, u_j) &= b_j \quad (j = \overline{0, N}) \\ b_j &= E(\omega, u_j). \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{де } E(u, v) = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} M_n v - u V_n v \right) ds - W_0 \langle V_n v \rangle |_{x=a, y=b},$$

$$\Gamma = \{(x = a, 0 < y < b) \cup (y = b, 0 < x < a)\},$$

$$b_j = W_0 \int_0^c V_y u_j(x, \pm 0) dx,$$

$$M_n = -D \left( \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right),$$

$$V_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \left( \Delta + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right),$$

$n$  – нормаль,  $s$  – дотична до межі  $\Gamma$ ,  $D$  – циліндрична жорсткість,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона, в подальшому для спрощення беремо  $c = 1$ .

Для перевірки правильності результатів, задача (1) – (5) була вирішена, також, методом граничної колокації.

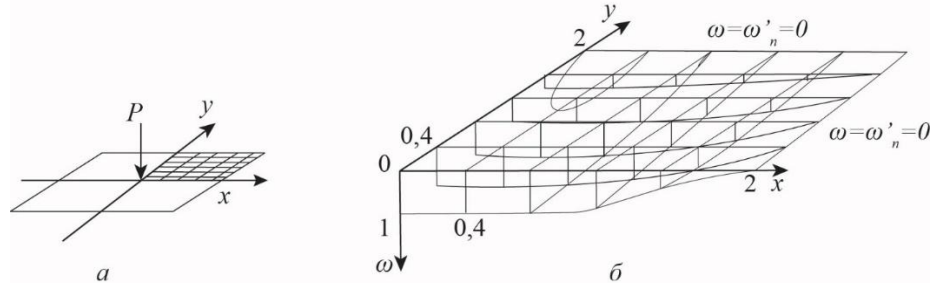
При вирішенні задачі (1) – (5) методом граничної колокації, використовувалось подання прогину у вигляді (6). Для знаходження невідомих коефіцієнтів  $a_i$  на  $\Gamma$  межі  $\Omega$   $\Gamma = \{(y = \pm 0, 0 < x < 1) \cup (x = a, 0 < y < b) \cup (y = b, 0 < x < a)\}$ , займаємою пластинною, вибирались  $M$  точок колокації ( $M = N + 1$ ). Точки вибирались зі згрупуванням до кінців проміжків, а саме:

$$\begin{aligned} y = 0, x_k &= \cos \left( \frac{\pi(2k-1)}{4n_1} \right), k = \overline{1, n_1}, \\ x = a, y_k &= b \cos \left( \frac{\pi(2k-1)}{4n_2} \right), k = \overline{1, n_2}, \\ y = b, x_k &= a \cos \left( \frac{\pi(2k-1)}{4n_3} \right), k = \overline{1, n_3}, \quad n_1 + n_2 + n_3 = M \end{aligned} \quad (20)$$

Реалізація граничних умов (2) – (5) в точках колокації (20), приводить до системи  $N+1$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $N+1$  невідомих  $a_i (i = \overline{0, N})$ .

Розрахунки були проведені для квадратних пластин ( $a=b$ ), при відносній довжині включення  $\varepsilon = c/a$ , рівній 0,66;0,5;0,2;0,1. Результати, отримані з допомогою обох викладених методів, практично співпали.

На рис. 1 приведено розподілення прогинів для пластини з розмірами  $a=b=2, \varepsilon=0.5$ . Прогини максимальні на включенні, де вони рівні  $W_0=1$ , і зменшуються до нуля на контурі пластини, що свідчить про добре відповідність умовам (2) – (5) обома методами.



**Рис. 1.** Розподіл прогинів пластини

Оптимальне, з точки зору відповідності граничним умовам (2) – (5), розміщення точок колокації наведені в таблиці 1, де  $n_1$  – кількість точок колокації при  $y = \pm 0, 0 < x < 1, n_2$  – при  $x = a, 0 < y < a, n_3$  – при  $y = a, 0 < x < a$ .

**Таблиця 1.**

$\varepsilon$	Кількість точок колокації		
	$n_1$	$n_2$	$n_3$
0,66	4	3	3
0,5	4	3	3
0,2	4	3	3
0,1	3	3	3

Розраховувалась рівнодіюча контактних зусиль  $P$ :

$$D^{-1}P = a_0 \int_0^1 \left( \frac{16}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{16}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx + \sum_{k=0}^N 8a_k P_k \quad (21)$$

$$P_k = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \left[ 2k(2k+1)x^{2k+2} - (8k^2+1)x^{2k} + 2k(2k-1)x^{2k-2} \right] dx$$

Для розрахунку  $P_k$  скористаємося наступними регуляризованими значеннями розбіжних інтегралів:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\pi, \quad \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\pi \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} (k \geq 2) \quad (22)$$

отримані із [4]:

$$\int_0^1 x^{2k} (1-x^2)^\lambda dx = \frac{1}{2} B\left(k + \frac{1}{2}, \lambda + 1\right) \text{ при } \lambda = -\frac{3}{2} \quad (23)$$

У висновку отримуємо

$$P_k = 0, D^{-1}P = 8\pi a_0$$

Механічна інтерпретація першої з рівностей (22) дана в [3, 4].

Значення безрозмірного коефіцієнта  $\alpha = 10^3 (Pa^2)^{-1} DW_0$ , при різних значеннях  $\varepsilon$ , приведено в таблиці 2. Як видно, при зменшенні відповідної довжини включення  $\varepsilon$ , значення  $\alpha$  наближаються до відповідного значення  $\alpha$  для зосередженої сили

$\alpha = 5,60$ , приведенному у [6].

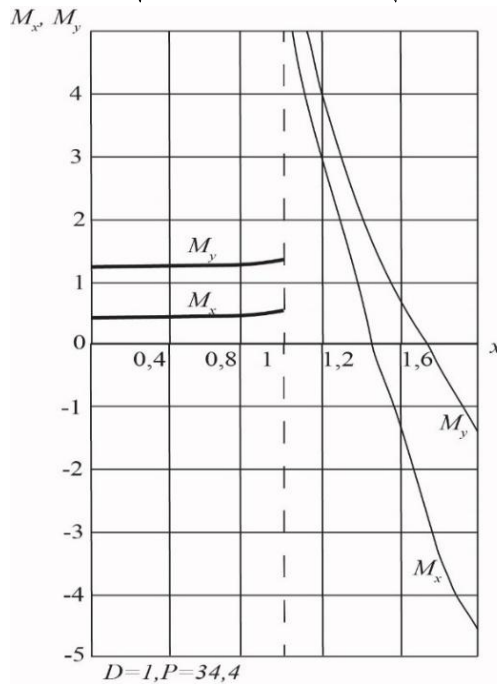
**Таблиця 2.**

Значення безрозмірного коефіцієнта  $\alpha = 10^3 (Pa^2)^{-1} DW$

$\varepsilon$	0,66	0,5	0,2	0,1
$\alpha$	0,76	1,81	4,05	4,90

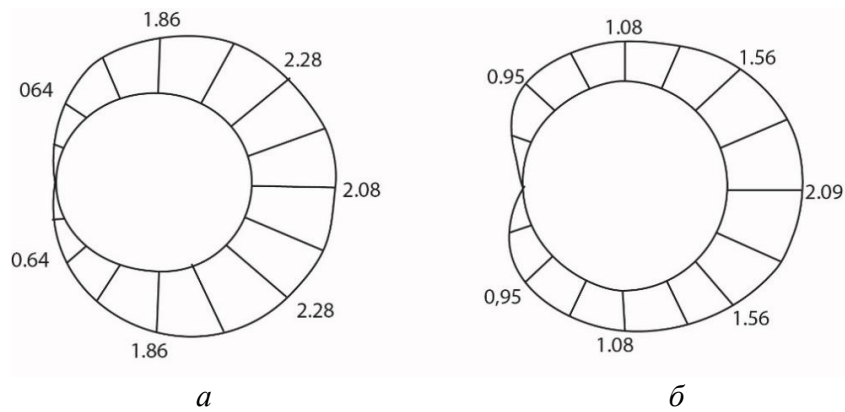
Графіки згинальних моментів  $M_x, M_y$  вздовж лінії  $y = +0, 0 < x < a$  наведені на рис. 2. При  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$   $M_x, M_y \rightarrow \infty$  як  $r^{\frac{1}{2}}$ ,  $r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ . Для опису цього факту в літературі [6] вводиться поняття коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$K_x = \lim \frac{M_x \sqrt{r}}{P \sqrt{c}}, \quad K_y = \lim \frac{M_y \sqrt{r}}{P \sqrt{c}}, \quad (24)$$



**Рис. 2.** Графіки згинальних моментів  $M_x, M_y$  вздовж лінії  $y = \pm 0, 0 \leq x \leq a$

Епюри величин  $K_x, K_y$  при  $r = 10^{-4}$  наведені на рис.3. Якісна картина аналогічна результатам роботи [6], де розглядалися безкінечні пластини.



**Рис. 3.** Епюри  $K_x(a), K_y(b)$

Отримані результати показують, що використання методу граничної колокації достатньо ефективно при вирішенні задач вигину нескінчених пластин з включеннями.

## Список літератури

1. Кривий О. Ф., Морозов Ю. О. Особливості поля напружень в околі міжфазного кругового включення при змішаних умовах контакту із кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором. *Прикладна механіка*. 2024. Т. 60, № 3. С. 91–100. URL: <http://jnas.nbuiv.gov.ua/article/UJRN-0001493980>
2. A. Usov, Yu. Morozov, M. Kunitsyn, A. Tonkonozhenko, I. Chernush. Investigation of the influence of structural inhomogeneities on the strength of welded joints of functionally gradient materials. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*, 2020. Is.1(60), DOI: <https://doi.org/10.15276/opu.1.60.2020.03>
3. Kryvyi, O.F., Morozov, Y. O. Influence of Concentrated Forces on an Interface Inclusion under the Conditions of Smooth Contact in the Inhomogeneous Transversely Isotropic Space. *J Math Sci*. 2024 V.279. P.197–212. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07005-3>
4. Kryvyi, O. F., Morozov, Y. O. Stress Field Features in Vicinity of Interfacial Circular Inclusion Under Mixed Contact Conditions with Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space. *Int Appl Mech*. 2024. V.60. P. 331–340. <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01286-6>
5. Грібова В. В., Перстньова В. В. Розрахунок деформації прямокутної пластини з тонким лінійним включенням. *Actual problems of practice and science methods of their solution: IV International Science Conference. Milan*. 2022. С. 515–518.
6. Грібова В. В., Бовнегра Л. В., Торопенко О. В. Метод граничної коллокації при моделюванні задач про вигини шарнірно-опертої пластини з тонким лінійним включенням. *Informatics and Mathematical Methods in Simulation* 2024. Vol.14. No. 4, P. 344-349. DOI 10.15276/imms.v14.no4.344

**SOLUTION OF THE PROBLEM OF BENDING OF A PLATE CLAMPED ALONG ITS CONTOUR WITH A THIN LINEAR INCLUSION BY THE METHOD OF MINIMIZING THE ENERGY ERROR**

V. Gribova, L. Bovnegra, A. Toropenko

National Odesa Polytechnic University  
1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine

Emails: [gribova@op.edu.ua](mailto:gribova@op.edu.ua), [dlv5@ukr.net](mailto:dlv5@ukr.net), [toropenko.a.v@op.edu.ua](mailto:toropenko.a.v@op.edu.ua)

Folded shells, thin-walled rods, and other structures based on thin plate joints are widely used in mechanical engineering, aviation, and shipbuilding industries. The presence of reinforcing rods, supports, straight defects such as cracks and inclusions, or other inhomogeneities in structures significantly complicates their calculation. The design and creation of reliable and sufficiently economical structures necessitates the consideration of increasingly complex boundary value problems and, accordingly, the solution of an increasing number of differential equations that describe them. The foundation of the science of strength is fracture mechanics, which is based on identifying the nature of stress characteristics in the vicinity of crack-type defects and thin inclusions. The basis of the method for solving the problem is the construction of a model based on the method of minimizing the energy error. The main results are the construction of a system of solutions to a biharmonic equation in a region with a straight inclusion and the application of the boundary collocation method to find the coefficients of the linear combination. The aim of the work is to solve complex boundary problems of fracture mechanics for thin-walled structures with inclusions by constructing a mathematical model based on the energy error minimization method and applying boundary collocation.

**Keywords:** system of biharmonic functions, boundary collocation method, class of functions with non-integrable features, plate deflections, energy error minimization method.