

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ РЯДІВ ТРИВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОСОСИМЕТРИЧНОГО ЗГИНАННЯ ШАРУ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Б.Є. Панченко¹, Ю.Д. Ковальов², Л.М. Тимошенко³, Г.О. Фесенко⁴, М.В. Северин⁵^{1,2,5}Державний університет інтелектуальних технологій та зв'язку

1, Кузнечна вул., Одеса, 65023, Україна

³Національний університет «Одеська політехніка»

1, Шевченка пр., Одеса, 65044, Україна

⁴Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

2, Змієнка Всеволода вул., Одеса, 65082, Україна

Emails: pr-bob@ukr.net¹, kovalev@ukr.net², fesenko@onu.edu.ua⁴, n_severin@ukr.net⁵

Розглянуто мішану задачу теорії пружності для нескінченного шару з отвором-порожниною вздовж висоти шару, коли на плоских гранях задано умови гладкого контакту, а по поверхні отвору діє навантаження. Невідомі переміщення, що виникають у шарі розкладаються у ряди Фур'є і методом розділення змінних система рівнянь рівноваги зводиться до системи диференціальних рівнянь відносно невідомих гармонік. Розв'язки розшукуються у вигляді комбінацій метатармонічних функцій та їхніх похідних. Для визначення цих функцій отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь. В результаті отримане окружне напруження, що виникає у шарі, було проаналізовано в залежності від матеріалу шару, вигляду отвору та співвідношень між радіусом отвору та висотою шару.

Ключові слова: тривимірна крайова задача, пружний шар, наскрізний отвір, метод рядів, чисельний експеримент.

Вступ. Математичне моделювання статичних тривимірних крайових задач у теорії пружності є важливим напрямом механіки деформівного твердого тіла, що має широке прикладне значення в інженерії та матеріалознавстві. Зокрема, задачі, пов'язані з тілами, які мають отвори, є актуальними через наявність концентрації напружень у таких зонах, що істотно впливає на міцність та надійність конструкцій.

Одним з ефективних аналітичних підходів до розв'язання подібних задач є метод рядів. Він дозволяє звести систему диференціальних рівнянь рівноваги до сукупності алгебраїчних співвідношень шляхом подання шуканих функцій напружень та переміщень у вигляді збіжних рядів за спеціальними функціями – сферичними чи циліндричними гармоніками, які задовольняють основним рівнянням теорії пружності та крайовим умовам.

Класичне дослідження Грінченка і Улітка [1] заслуговує на особливу увагу, оскільки в ньому було отримано точний аналітичний розв'язок задачі про розподіл напружень поблизу кругового отвору у пружному шарі. Запропонований підхід дозволив врахувати геометричні особливості задачі та забезпечити високу точність розрахунків у критичних зонах концентрації напружень, що має важливе значення для оцінки міцності та довговічності конструкцій із отворами.

У монографії [2] Поповим Г.Я. розглянуто задачі теорії пружності, пов'язані з концентрацією напружень навколо неоднорідностей, таких як тріщини та тонкі включення. Автором запропоновано методи аналітичного та наближеного розв'язання задач для різних областей та типів навантажень. Значну увагу приділено побудові асимптотичних розв'язків і аналізу напружено-деформованого стану в околі неоднорідностей. Робота є важливою для розробки та оцінки міцності елементів конструкцій з урахуванням ефектів концентрації напружень.

В роботі [3] Фесенко та Вайсфельд досліджують динамічну задачу для нескінченного пружного шару з циліндричною порожниною. Застосовано метод інтегральних перетворень, що дозволяє точно описати хвильові процеси в присутності геометричних неоднорідностей.

В роботі Панченка, Ковальова та співавт. [4] розглянуто кососиметричну задачу для пружного шару з наскрізним отвором, в якій використовуються крайові умови ковзного защемлення торців [5]. Авторами запропоновано аналітичний підхід на основі подання розв'язку у вигляді рядів спеціальних функцій, що дозволяє дослідити розподіл напружень та переміщень у шарі.

Стаття [6] розширює підхід до моделювання тривимірних задач для пружного шару з неоднорідностями. Розглядаються різні крайові умови на торцях, що дозволяє моделювати широкий клас практичних ситуацій. В роботі приділено увагу побудові розв'язків із застосуванням розвинень за ортогональними функціями.

Істотний внесок у моделювання шарів із наскрізними отворами зроблено у працях Фільштинського та Ковальова [7], де проаналізовано напружений стан п'єзокерамічного шару зі складною геометрією. Розв'язок побудовано з урахуванням п'єзоелектричних ефектів, що розширює область застосування моделі для функціональних матеріалів.

В роботі [8] запропоновано фундаментальні розв'язки для кососиметричного випадку в шарі типу R^3 з урахуванням змішаних крайових умов. Представлені розв'язки можуть бути використані як базисні функції для побудови наближених розв'язків задач із більш складною геометрією та навантаженням.

Отже, наведені результати засвідчують активний розвиток методів математичного моделювання для тривимірних крайових задач, зокрема із застосуванням рядів і спеціальних функцій, що відкриває можливості для точного опису поведінки тіл із отворами та неоднорідностями.

В межах цієї роботи розглядається побудова аналітичного розв'язку методом рядів [1] крайової задачі про кососиметричний вигін пружного шару з круговим отвором та ковзним защемленням торців [5] для опису його напружено-деформованого стану (НДС). Досліджується вплив матеріалу та геометричних параметрів шару, а також радіусу отвору на розподіл напружень. Проведено порівняння отриманих тут результатів з результатами, отриманих методом сингулярних інтегральних рівнянь [4, 6].

Надані результати можуть бути використані для підвищення точності розрахунків конструктивних елементів з отворами та оптимізації їх форми з урахуванням напруженого стану.

Постановка задачі. Розглянемо пружний шар $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, послаблений наскрізним отвором вздовж осі Ox_3 , на поверхні якого діє поверхневе навантаження (N, T, Z) , а на плоских гранях шару $x_3 = \pm h$ задано умови гладкого контакту. Переміщення $u_n(x_1, x_2, x_3)$, $n = 1, 2, 3$, що виникають у шарі задовольняють рівнянням рівноваги

$$\Delta \mathbf{u} + \sigma \operatorname{grad} \theta = 0, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3))$ – вектор переміщень, $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ – об'ємне розширення, $\sigma = (1 - 2\nu)^{-1}$, ν – коефіцієнт Пуассона. Граничним умовам на плоских торцях шару мають вигляд:

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = 0, \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (2)$$

Запишемо компоненти вектору переміщення у вигляді рядів Фур'є

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad i = 1, 2, \quad u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi, \quad (3)$$

які автоматично задовольняють умовам (2) на торцях шару. Після підстановки подань (3) у рівняння рівноваги (1) та розділення змінних отримаємо систему відносно компонент $u_{ik}(x_1, x_2)$, $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \kappa_k u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \kappa_k u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\kappa_k = \nabla^2 - \gamma_k^2, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad i = 1, 2.$$

Безпосередньо з системи (3) знайдено, що

$$\kappa_k \theta_k = 0 \Rightarrow (\nabla^2 - \gamma_k^2) \theta_k = 0, \quad (4)$$

що означає метатармонічність функції θ_k . Виходячи з цього, введемо функцію ψ_k співвідношенням:

$$\theta_k = \kappa_k \psi_k \quad (5)$$

Із співвідношення (4) маємо, що $\kappa_k^2 \psi_k = 0$. З урахуванням зв'язку (5) між функціями ψ_k та θ_k інтегрування системи (3) дає можливість отримати

$$u_{1k} = -\sigma \partial_1 \psi_k + \varphi_{1k}, \quad u_{2k} = -\sigma \partial_2 \psi_k + \varphi_{2k}, \quad u_{3k} = -\gamma_k \sigma \psi_k + \varphi_{3k}, \quad (6)$$

де $\kappa_k \varphi_{ik} = 0$, $i = 1, 2$.

Після вимоги фактичного виконання співвідношення (5), отримаємо, що

$$\varphi_{1k} = \sigma \partial_2 \varphi_k, \quad \varphi_{2k} = -\sigma \partial_1 \varphi_k, \quad \varphi_{3k} = -\frac{1+\sigma}{\gamma_k} \kappa_k \psi_k, \quad (7)$$

де φ_k – довільний розв'язок рівняння $\kappa_k \varphi_{ik} = 0$, $i = 1, 2$.

Формули (3), (6), (7) дають вирази пружних переміщень у шарі через функції φ_k, ψ_k .

В силу (6), (7) маємо

$$u_{1k} - i u_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i \varphi_k - \psi_k), \quad u_{3k} = -\left(\frac{1+\sigma}{\gamma_k} \kappa_k + \sigma \gamma_k \right) \psi_k, \quad (8)$$

де $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i \partial_2)$, $z = x_1 + i x_2$.

Граничні умови на контурі L отвору запишемо у комплексній формі

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT) \\ \operatorname{Re} [e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})] &= Z \end{aligned} \quad (9)$$

де ψ – кут між зовнішньою нормаллю до контуру порожнини-отвору та віссю Ox_1 .

Використовуючи закон Гука та формули (6), представимо умови (9) у формі

$$\begin{aligned} 2\sigma e^{2i\psi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (i \varphi_k - \psi_k) \right\} - \frac{1}{2} \theta_k - \frac{1}{2} \sigma \gamma_k^2 \psi_k &= \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \\ -\operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \gamma_k \psi_k + \frac{1+\sigma}{\gamma_k} \theta_k \right) - \sigma \gamma_k \frac{\partial}{\partial z} (i \varphi_k - \psi_k) \right] \right\} &= \frac{1}{2\mu} Z_k, \end{aligned} \quad (10)$$

де μ – модуль зсуву.

Функцій φ_k и ψ_k розшукуємо у вигляді:

$$\varphi_k = 0, \quad \psi_k = A_k K_0(\gamma_k r) + B_k r K_1(\gamma_k r),$$

де A_k, B_k – невідомі константи, $K_n(\gamma_k r)$ – функції Макдональда порядку $n = 0, 1$, $r = |\zeta - z|$, $\zeta = \xi + i\eta \in L$, $z = x_1 + ix_2$.

Підставивши вирази у граничні умови, та розглянувши випадок $T_k = 0, Z_k = 0$ на $r = 1$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$a_{11}A_k + a_{12}B_k = \frac{1}{2\mu} N_k$$

$$a_{21}A_k + a_{22}B_k = 0$$

де

$$a_{11} = -\sigma\gamma_k K_1(\gamma_k r) - \sigma\gamma_k^2 K_0(\gamma_k r), \quad a_{12} = \gamma_k K_0(\gamma_k r) - \sigma\gamma_k^2 K_1(\gamma_k r),$$

$$a_{21} = \sigma\gamma_k K_1(\gamma_k r), \quad a_{22} = \sigma\gamma_k K_0(\gamma_k r) - (1 + \sigma)K_1(\gamma_k r).$$

Звідки знайдено, що

$$A_k = N_k \frac{a_{22}}{d}, \quad B_k = -N_k \frac{a_{21}}{d}, \quad d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad N_k = \frac{N_k}{2\mu},$$

$$\sigma_{\theta}^k = N_k \left(\frac{a_{22}d_1}{d} - \frac{a_{21}d_2}{d} - 1 \right), \quad d_1 = -\sigma\gamma_k^2 K_0(\gamma_k r), \quad d_2 = 2\gamma_k K_0(\gamma_k r) - \sigma\gamma_k^2 K_1(\gamma_k r),$$

В результаті маємо остаточний вираз для окружного напруження, що виникає у шарі

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{\theta}^k \sin(\gamma_k x_3).$$

Результати чисельного дослідження. Розглянемо випадок, коли на поверхні отвору діє навантаження $N = -Px_3$, $T = Z = 0$, $P = const$.

На рис. 1 наведені епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}/P$ вздовж координати в точці $\varphi = 0$ кругового отвору ($R_1 = R_2 = 1$) за товщиною. Криві 1, 2, 3 рис. 1а побудовані для $h/R_1 = 1$ та коефіцієнтів Пуассона $\nu = 0,2; 0,3; 0,4$ відповідно. Ці результати порівнювалися з результатами робіт [3,5]. Збіг показує достовірність використаного тут методу. Криві 1;2;3 рис. 1б наведено для $h/R_1 = 2$ також для коефіцієнтів Пуассона $\nu = 0,2; 0,3; 0,4$ відповідно.

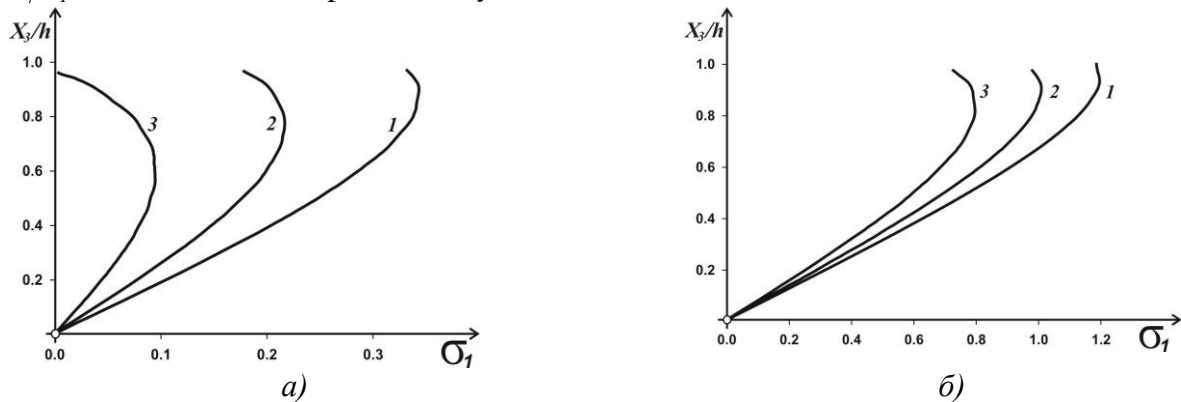


Рис. 1. Епюри розподілу відносного окружного напруження вздовж координати в точці $\varphi = 0$ кругового отвору за товщиною

На рис. 2а наведені епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}/P$ вздовж координати в точці $\varphi = 0$ за товщиною. Криві 1, 2, 3 побудовані для кругового отвору ($R_1 = R_2 = 1$) та коефіцієнту Пуассона $\nu = 0,3$, де $h/R_1 = 1,5; 3; 5$ відповідно.

На рис. 2б наведені епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}/P$ вздовж координати в точці $\varphi = 0$ за товщиною для еліптичного отвору у випадку $h/R_1 = 1$ ($R_1 = 1$). Криві 1;2;3;4 наведено для $R_2 = 0,3; 0,5; 0,7; 1$ відповідно

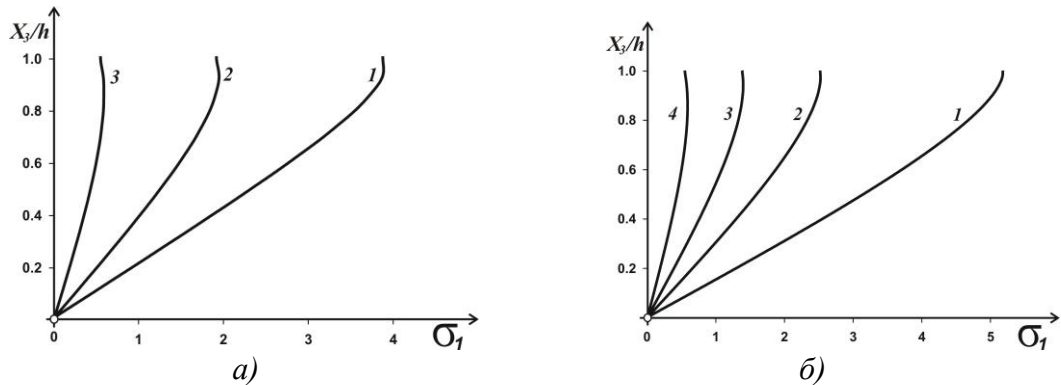


Рис. 2. Епюри розподілу відносного окружного напруження вздовж координати в точці $\varphi = 0$ за товщиною для еліптичного отвору

На рис. 3 наведені епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}/P$ по контуру еліптичного отвору $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ а площині $x_3/h = 1$ у випадку $h/R_1 = 1,5; 2,5$ ($R_1 = 1$) на рис. 3а та 3б відповідно. Для отримання нових чисельні результатів для отвору з еліптичним контуром використано математичну модель, запропоновану в [3,5]. Криві 1; 2; 3; 4 наведені відповідно до $R_2 = 0,3; 0,5; 0,7; 1$. За формулю та значеннями напружень отримано очікувані результати. Як і в [3,5] для отвору кругової форми криві 4 вироджуються в прями, що підтверджується і використанням алгоритму розв'язку задачі в рядах. Тут чисельні результати отримані зі значенням коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,3$.

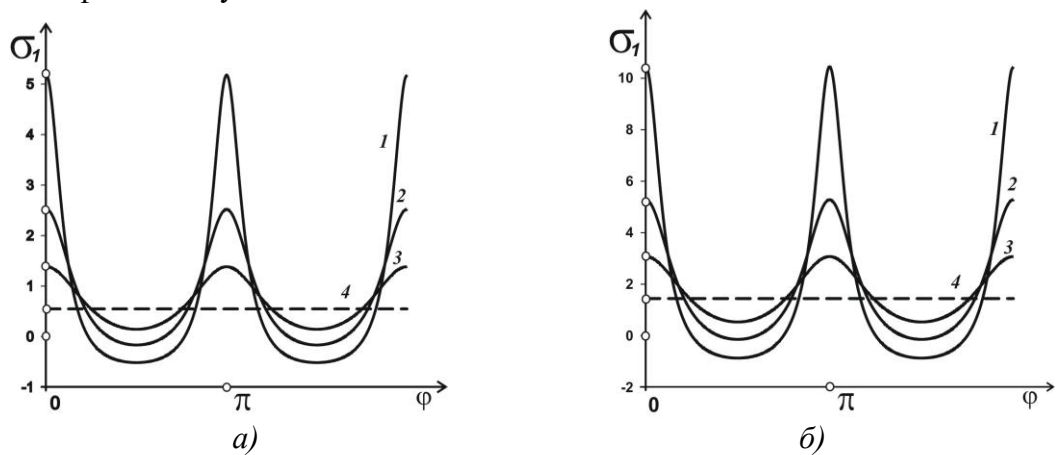


Рис. 3. Епюри розподілу відносного окружного напруження по контуру еліптичного отвору

Висновки. Запропонована математична модель розв'язання тривимірних статичних крайових задач для шару з наскрізним отвором та ковзному защемленні торців, є адекватною та ефективною. Алгоритм добре масштабується та надає можливість ефективного керування ресурсами.

Для поставленої задачі за результатами чисельного дослідження можна зробити такі висновки.

1. Зі збільшенням товщини шару відбувається зростання відносного напруження.

2. У разі кругового отвору спостерігається зменшення максимуму відносного окружного напруження від торців у глибину шару.
3. Зі зменшенням R_2 спостерігається зростання відносного окружного напруження.

Список літератури

1. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Sov. Appl. Mech.* 1968. Vol.4. No.10. P. 31-37.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
3. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity.* 2021. Vol. 33. P. 509-527.
4. Панченко Б.С., Ковальов Ю.Д., Каліна Т.О., Сайко І.М., Буката Л.М. Математичне моделювання в статичних тривимірних крайових задачах – кососиметрична задача для шару, послабленого наскрізним отвором при ковзному защемленні торців. *Кібернетика та системний аналіз.* 2024. Т.60. №1. С. 182-195.
5. Шевченко В.П., Алтухов Е.В., Фоменко М.В., Деформація трехслойных пластин со скользящей заделкой торцов и несовершенным контактом слоев. *Доповіди Національної академії наук України.* 2012. № 8. С. 61-66
6. Панченко Б.С., Ковальов Ю.Д., Буката Л.М. Северин М.В. Математичне моделювання деяких тривимірних крайових задач для шару з неоднорідностями та різними крайовими умовами на торцях. *Colloquium-journal. Computer science.* 2024. №13 (206). С. 19-31.
7. Фільштинський Л.А., Ковальов Ю.Д. Моделювання напруженого стану п'єзокерамічного шару, ослабленого наскрізними тунельними отворами. *Вісник Херсонського державного технічного університету.* 2000. №2 (8). С. 216-219.
8. Фільштинський Л.А., Шрамко Л.В. Фундаментальні рішення для п'єзокерамічного шару R_3 (кососиметричний випадок, змішані граничні умови). *Теорет. та прикладна механіка.* 2003. Вип. 38. С. 53-57.

MATHEMATICAL MODELING BY SERIES METHOD OF A THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SKEW-SYMMETRIC BENDING OF A LAYER WITH A CIRCULAR HOLE

B.E. Panchenko¹, Yu.D. Kovalev², L.M. Timoshenko³, G.O. Fesenko⁴, M.V. Severyn⁵

^{1,2,5}State University of Intellectual Technologies and Communications

1, Kuznechna Str., Odesa, 65023, Ukraine

³National Odesa Polytechnic University

1, Shevchenko Ave., Odesa, 65044, Ukraine

⁴Odesa National University named after I. I. Mechnikov

2, Zmienko Vsevolod Str., Odesa, 65082, Ukraine

Emails: pr-bob@ukr.net¹, kovalev@ukr.net², fesenko@onu.edu.ua⁴, n_severin@ukr.net⁵

A mixed problem of the theory of elasticity for an infinite layer with a hole-cavity along the height of the layer is considered, when the conditions of smooth contact are given on the flat faces, and a load acts on the surface of the hole. The unknown displacements arising in the layer are expanded into Fourier series and by the method of separation of variables the system of equilibrium equations is reduced to a system of differential equations with respect to unknown harmonics. Solutions are sought in the form of combinations of metaharmonic functions and their derivatives. To determine these functions, a system of linear algebraic equations is obtained. The resulting circumferential stress arising in the layer was analyzed depending on the layer material, the shape of the hole, and the relationship between the hole radius and the layer height.

Keywords: three-dimensional boundary value problem, elastic layer, through hole, series method, numerical experiment.